الجبر الخطي والهندسة التحليلية

المستوى الثاني تقانة

المحاضرة الأولى

3- المصفوفات Matrices

تعتبر المصفوفات لغة رياضية قوية وموجزة. فالعلاقات التي تحتاج عادة إلى عدد كبير من الرموز والأرقام يمكن التعبير عنها بإيجاز ووضوح باستخدام المصفوفات.

المصفوفة عبارة عن مجموعة من الكميات التي عددها $m \times n$ مرتبة في تشكيل يحتوى على m من الصفوف و n من الأعمدة.

تختلف المصفوفة عن المحددة في شكلها بأن يوضع تشكيل المصفوفة عادة بين قوسين مربعين (أو مستديرين) ويعبر عن المصفوفة بحرف واحد كبير A , B , C وأحياناً بالرمز Δ فمثلاً

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

وتسمى الكميات a_{ik} المكونة للمصفوفة بعناصر المصفوفة حيث i عدد الصفوف و k عدد الأعمدة وتسمى المصفوفة التى تحتوى على صفوف عددها m وأعمدة عددها n بمصفوفة ذات رتبة $(m \times n)$ وإذا كانت $m=n$ فإن المصفوفة تكون مربعة ولا توجد للمصفوفات أى قيمة جبرية بعكس المحددات.

أشكال المصفوفات:

يمكن التمييز بين عدة أشكال للمصفوفات بحسب عدد الأسطر وعدد الأعمدة وبحسب عناصر المصفوفة. وهذه الأشكال هي:

1. **المصفوفة المربعة Squared Matrix**: عدد الصفوف يساوي عدد الاعمدة الشكل العام للمصفوفة المربعة هو:

$$S_{(n,n)} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2j} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{ij} & \dots & s_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nj} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

مثل المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. <u>المصفوفة الصفرية (المعدومة)</u>: هي مصفوفة كافة عناصرها أصفار. إذن فالشكل العام لها هو:

$$O_{(m,n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

3. المصفوفة العمود والمصفوفة الصف:

مصفوفة الصف: Row Matrix

المصفوفة التي لها صف واحد يطلق عليها مصفوفة ذات الصف الواحد وتسمى في بعض الأحيان بالمتجه الصفي Row Vector ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز (A) ورتبتها (1 x n) وتكون على الشكل التالي:

$$A_{(1,n)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_j & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

فمثال ذلك:

$$(A)_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

مصفوفة العمود: Column Matrix

المصفوفة التي لها العمود الواحد يطلق عليها مصفوفة ذات العمود الواحد وتسمى في بعض الأحيان بالمتجه العمودي Column Vector ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز [A] ورتبتها (m x 1) وتكون على النحو التالي:

$$A_{(m,1)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$$

فمثال ذلك:

$$[A]_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

4. المصفوفة القطرية: Diagonal Matrix

هي المصفوفة المربعة التي فيها كل العناصر تساوى صفر ما عدا عناصر القطر الأساسي وهو (المار بأعلى عنصر من اليسار إلى أسفل عنصر من اليمين $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots a_{mn})$ وتكون الشكل العام للمصفوفة القطرية من المرتبة n هو:

$$D_{(n,n)} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

مثل المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ومن الواضح أن أي مصفوفتين مربعتين تقبلان الضرب في بعضهما إذا كانتا من نفس الرتبة. كذلك فإن أي مصفوفتين قطريتين تقبلان الضرب في بعضهما وتخضعان لقانون التبادل أي أن AB =BA.

5. المصفوفة القياسية ومصفوفة الوحدة: Scalar and Unit Matrix

المصفوفة القطرية التي يكون مجموع عناصر قطرها الرئيسي متساوية تسمى المصفوفة القياسية Scalar matrix وإذا كانت عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القياسية تساوى الواحد الصحيح تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الوحدة Unit matrix ويرمز لها بالرمز I_n حيث (n x n) هى رتبة المصفوفة،ويكون شكلها العام كما يلي:

$$I_{(n,n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

فمثلاً :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبوجه عام إذا كانت A مصفوفة مربعة رتبتها $I_{(m \times m)}$ هي مصفوفة الوحدة بنفس الرتبة فإن:

$$IA = AI = A$$

$$I = I^2 = I^3 = \dots\dots\dots = I^k$$

حيث k عدد صحيح موجب ويمكن إثبات ذلك بسهولة.

فبضرب أي مصفوفة A في مصفوفة الوحدة تبقى المصفوفة A كما هي بدون تغيير بفرض قابلية ضرب المصفوفتين حسب قانون ضرب المصفوفات السابق، فمثلاً :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

كذلك إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\therefore AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

6. **المصفوفة المثلثية العليا**: الشكل العام لهذه المصفوفة هو:

$$T_{(n,n)} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

7. المصفوفة المثلثية الدنيا:

الشكل العام لهذه المصفوفة هو:

$$T_{(n,n)} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

8. المصفوفة المتناظرة (المتماثلة):

هي مصفوفة مربعة كل عنصرين متقابلين بالنسبة للقطر الرئيسي فيها متساويان. أي أن xij = xji مهما تكن i,j (i,j = 1, 2, …, n).

مثال (2): المصفوفتان التاليتان كل منهما مصفوفة متناظرة:

مثال (2): المصفوفتان التاليتان كل منهما مصفوفة متناظرة:

$$S_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad S_{(5,5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

يمكن اعتبار كل من المصفوفة القطرية والمصفوفة الواحدية مصفوفة متناظرة.

9. المصفوفة متعاكسة التناظر (المتقابلة):

هي مصفوفة مربعة كل عنصرين متقابلين بالنسبة للقطر الرئيسي فيها متساويان بالقيمة المطلقة ومختلفان بالإشارة. أي أن $x_{ij} = -x_{ji}$ مهما تكن i,j $(i,j = 1, 2, \ldots, n)$.

مثال (3):

المصفوفتان التاليتان كل منهما مصفوفة متعاكسة التناظر:

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & 9 \\ -1 & 4 & 0 & -7 \\ 5 & -9 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

10. المصفوفتان المتساويتان:

نقول عن المصفوفتين $X_{(m,n)}, Y_{(m,n)}$ إنهما متساويتان إذا كان لهما نفس المرتبة (أي نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة) وكان كل عنصر في المصفوفة الأولى مساوياً العنصر المقابل له في المصفوفة الثانية. إذن:

$$X_{(m,n)} = Y_{(m,n)} \Leftrightarrow \forall\, x_{ij} \in X_{(m,n)}\ , y_{ij} \in Y_{(m,n)} : x_{ij} = y_{ij}$$

حيث: $i = 1,2,.....m$ و $j = 1,2,.....n$.